Umwandeln von Ebenengleichungen

$\vec{p}$: *Ortsvektor*
$\vec{u}, \vec{v}$: *Spannvektoren*
$\vec{n}$: *Normalenvektor*
$\vec{n}_0$: *Einheitsnormalenvektor*

8

Koordinatengleichung in Achsenabschnittsform

$$E: \frac{x_1}{\frac{d}{n_1}} + \frac{x_2}{\frac{d}{n_2}} + \frac{x_3}{\frac{d}{n_3}} = 1$$

Koordinatenform

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

5 6 4 3

Parameterform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

1 2

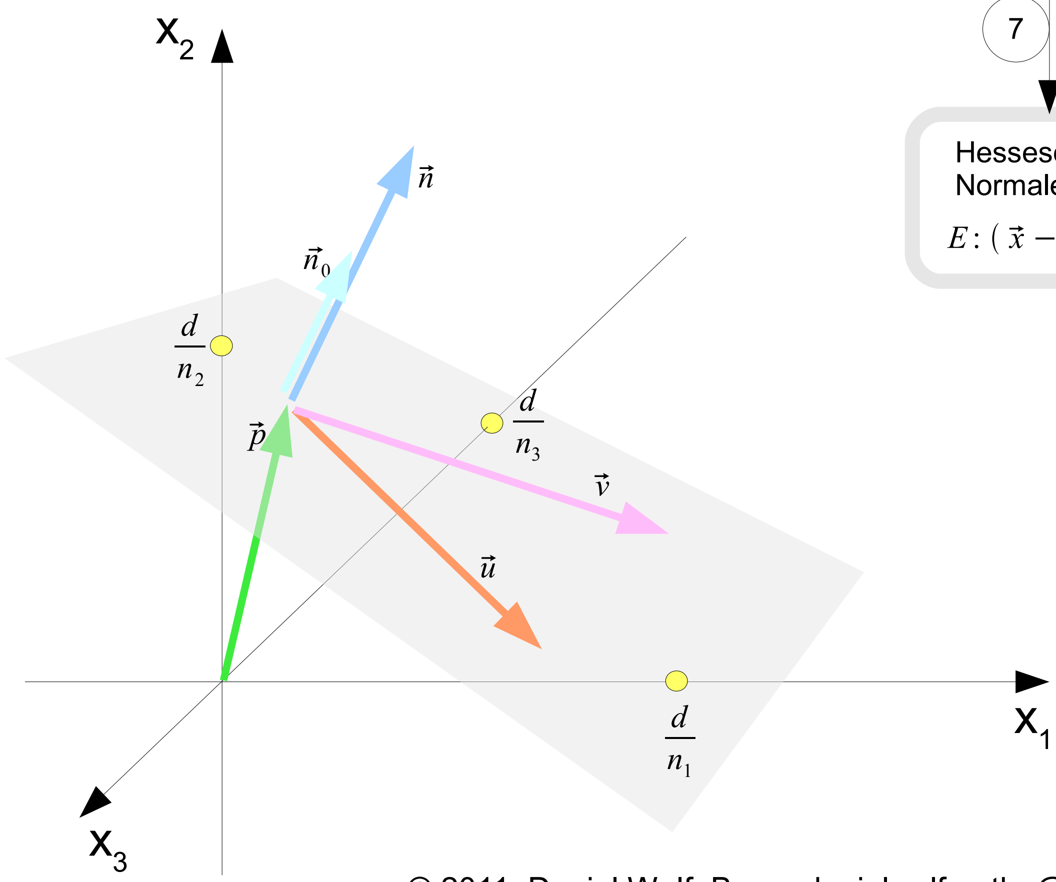
Normalenform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

7

Hessesche Normalenform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$



1 Parameterform → Normalenform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor n bestimmen

Alternative 1

$$\vec{n} \perp \vec{u} \ \wedge \ \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \ \wedge \ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1n_1 - 1n_2 + 7n_3 = 0 \ \wedge \ 3n_1 - 1n_2 + 6n_3 = 0$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten aber nur 2 Gleichungen.
Wir können hier eine Variable frei wählen. Wir wählen: $n_3=1$

(Geometrisch interpretiert: Die Länge des Normalenvektors spielt hier keine Rolle)

Daraus ergibt sich:

$$1n_1 - 1n_2 + 7 = 0 \ \wedge \ 3n_1 - 1n_2 + 6 = 0$$

Gleichungssystem auflösen ergibt:

$n_1=1/2$ $\qquad$ $n_2=15/2$

Ein möglicher Normalenvektor ist also $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 15/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um die Brüche zu entfernen kann man den Vektor mit 2 multiplizieren
und man erhält:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alternative 2

Anwendung des Vektorproduktes $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

Also: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 6-7\cdot(-1)\\7\cdot 3-1\cdot 6\\1\cdot(-1)-(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}$

Den Ortsvektor können wir von der Parameterform übernehmen, die Normalenform lautet also:

$$E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}=0$$

2 Normalenform → Parameterform

$$E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}=0$$

Die allgemeine Parameterform lautet:

$$E:\ \vec{x}=\vec{p}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$$

Der Ortsvektor p kann von der Normalenform übernommen werden:

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$$

Mit u und v werden nun 2 Vektoren gesucht, die jeweils senkrecht (orthogonal) zum Normalenvektor n stehen.
Zwei Vektoren sind senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \qquad \vec{n}\cdot\vec{v}=0$$

$$\begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$$

$$1u_1+15u_2+2u_3=0 \qquad 1v_1+15v_2+2v_3=0$$

Wir haben nun je eine Gleichung mit 3 Unbekannten.
Wir können je 2 Variablen (fast) frei wählen.

$$\begin{aligned}u_2&=1\\u_3&=1\\\Rightarrow 1u_1+15+2&=0\\u_1&=-17\end{aligned} \qquad \begin{aligned}v_2&=1\\v_3&=2\\\Rightarrow 1v_1+15+4&=0\\v_1&=-19\end{aligned}$$

$$\longrightarrow\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-17\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-19\\1\\2\end{pmatrix}$$

3 Normalenform → Koordinatenform

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren (Distributivgesetz)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 2$$

$$1x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 19$$

4 Koordinatenform → Normalenform

$$1x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 19$$

Der Normalenvektor n kann anhand der Vorfaktoren sofort abgelesen werden: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es muss noch ein Ortsvektor p gefunden werden.
Dazu müssen x_1, x_2 und x_3 so gewählt werden, dass die Gleichung erfüllt ist.

x_2 und x_3 werden frei gewählt:

$$x_2 = 1 \quad (p_2)$$
$$x_3 = 1 \quad (p_3)$$
$$\Rightarrow 1x_1 + 15 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 19$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad (p_1)$$

Der Ortsvektor ist also: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Und die Normalenform der Ebene: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

5 Koordinatenform → Parameterform

Koordinatenform erst in Normalenform, dann in Parameterform umwandeln.

6 Parameterform → Koordinatenform

Parameterform erst in Normalenform, dann in Koordinatenform umwandeln.

7 Normalenform → Hessesche Normalenform

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Länge des Normalenvektors n ausrechnen: $|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \sqrt{1^2 + 15^2 + 2^2} = \sqrt{230}$

Also: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{230} \\ 15/\sqrt{230} \\ 2/\sqrt{230} \end{pmatrix} \longrightarrow E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{230} \\ 15/\sqrt{230} \\ 2/\sqrt{230} \end{pmatrix} = 0$

8 Koordinatenform → Achsenabschnittskoordinatenform

$$1x_1 + 15x_2 + 2x_3 = 19 \quad | \; :19$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{19}x_1 + \frac{15}{19}x_2 + \frac{2}{19}x_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{\frac{19}{1}} + \frac{x_2}{\frac{19}{15}} + \frac{x_3}{\frac{19}{2}} = 1$$